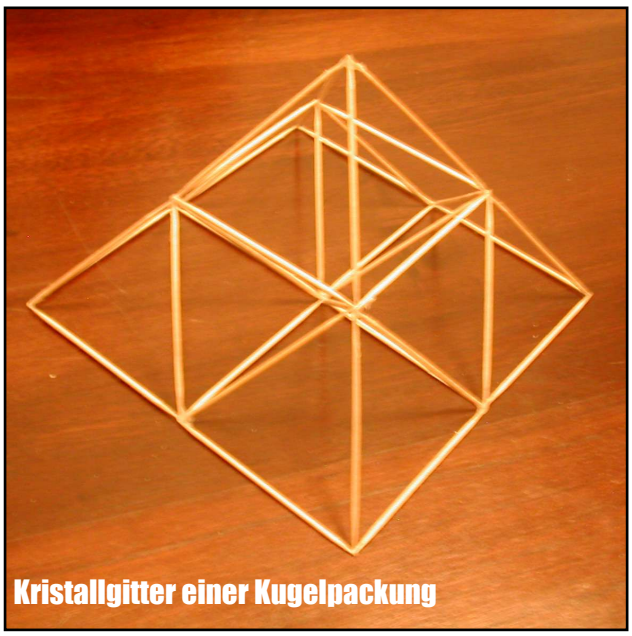
Eine Pyramide aus Kugeln

Eine Pyramide aus übereinander gelegten Kugeln – das ist sehr einfach und kompliziert zugleich!

In der Draufsicht



Kristallgitter einer Kugelpackung

So wie in den Abbildungen links wurden damals im Mittelalter Kanonenkugeln einfach übereinander geschichtet. Die Kugeln der jeweils folgenden Schicht fallen in die Lücken der darunter liegenden Lage Kugeln. Die Kanonenkugeln waren schwer und die unterste Lage drückte sich tief in den Boden.
Mein Modell aus Tennisbällen muss ich entsprechend verkleben, um zum gleichen Resultat zu kommen.
Kugeln einfach übereinander gelegt zu einer Pyramide ergeben das so genannte „Kubisch flächenzentrierte Kristallgitter" einer dichtesten Kugelpackung. Komplizierte Worte für eine scheinbar einfache Sache!
Wie diese Kugelpackung konstruiert und definiert ist, bzw. warum sie „Kubisch flächenzentriert" benannt wird, werde ich am Ende erklären.

Stellt man sich nun vor, dass alle Mittelpunkte der Kugeln mit Verstrebungen, bzw. Linien verbunden sind, so erhalten wir ein Gitternetz. Dieses Gitternetz scheint einfach aus vielen kleinen übereinander gestapelten Pyramiden zu bestehen. Das dritte Bild unten zeigt so eine Gitterpyramide aus genau fünf kleineren Pyramiden, vier unten und eine oben drauf. Demnach würde dieses unten stehende Modell aus genau 14 Kugeln bestehen, denn es hat nur eine Kantenlänge von 3 Kugeln. Obenstehende Kugelmodelle haben eine Kantenlänge von 4 Kugeln. Charakterristisch für diese Gitter sind die naturgemäß immer gleichen Abstände zu den Kugelmittelpunkten.
Schaut man der Pyramide auf die Seite, so sehen wir dreieckige Kugelverbindungen, schaut man dagegen auf die Spitze der Pyramide, dann sehen wir quadratische Kugelverbindungen. Die dreieckigen Verbindungen werden „hexagonal" genannt, weil sie sich innerhalb dieser Matrix zu Hexagonen und Hexagrammen ergänzen.
Dieses Gitternetz besteht aus Tetraeder,-und Oktaederlücken. Bei dieser Kugelpackungsvariante handelt sich um die wichtigste, also die Grundform. Andere Packungsvarianten von Kugeln enthalten nur Teilaspekte dieser „Königsform".
Sie ist die einzige so genannte „dichteste Kugelpackung", bei der sich um jede beliebige Kugel im fraktalen Gitter jeweils immer genau polar gegenüber stehende Kugel-Pärchen befinden. Jede Kugel wird immer von genau 12 Nachbar-Kugeln unmittelbar berührt.

Schauen wir uns nun im Folgenden nun einige Ausschnitte aus dieser Kugelpackung an. Vielleicht muss man sich ein wenig anstrengen um sich ein Bild zu machen.

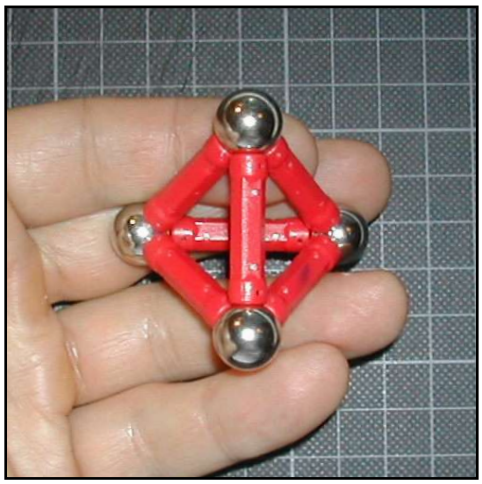
Ich wünsche dem Betrachter viel Erfolg
beim Entdecken tiefer Zusammenhänge!

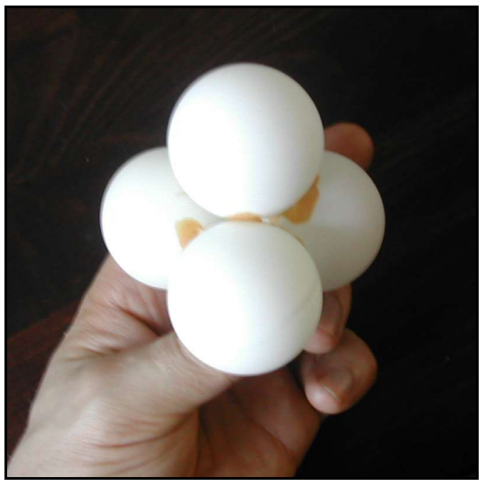
30. September 2006

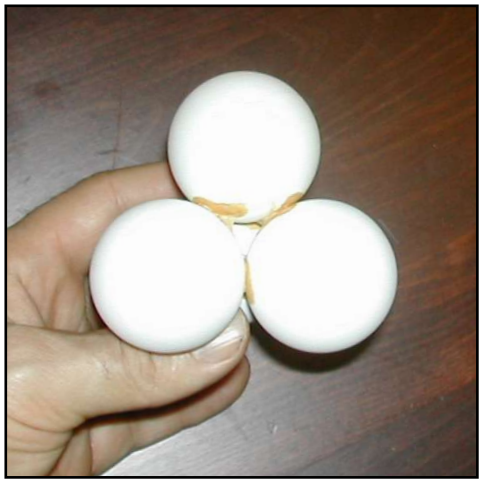
gehostet auf http://tetraktys.de

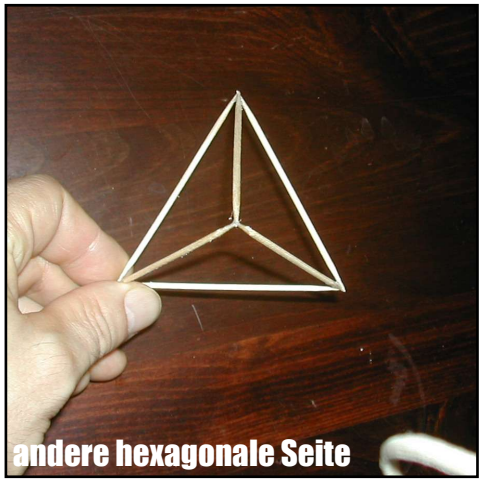
Das Tetraeder (1)

Links zu sehen ein Gittermodell aus Zahnstochern, in der Mitte ein Gittermodell aus Magnetstäben und rechts die Kugelpackung. Die Knotenpunkte der Gittermodelle sind identisch mit den Kugelmittelpunkten!





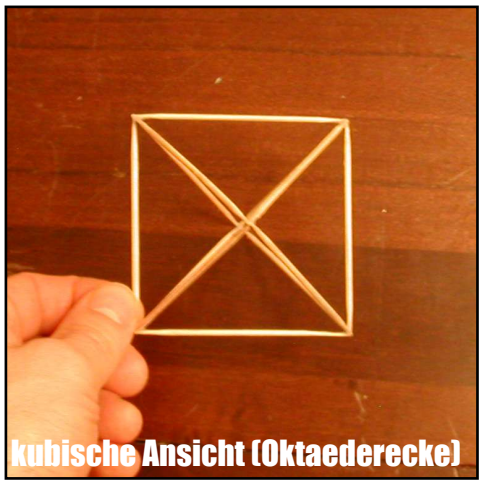


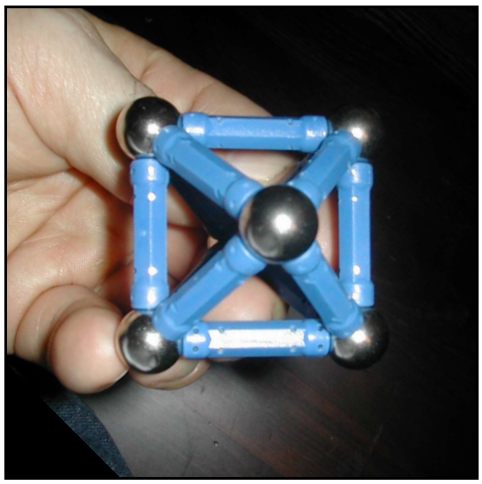


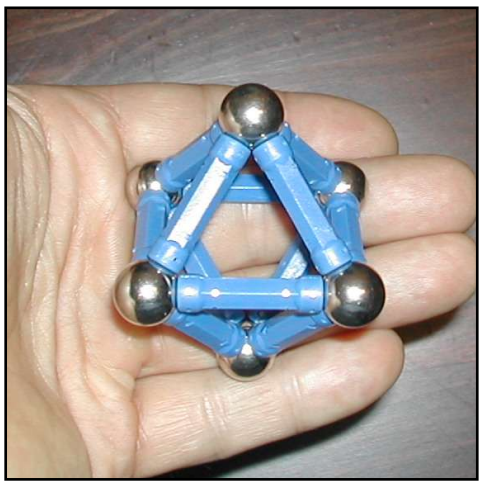
mehr auf: http://tetraktys.de

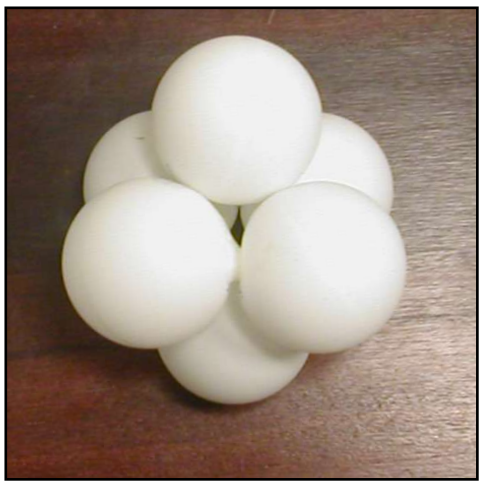
Das Oktaeder (2)

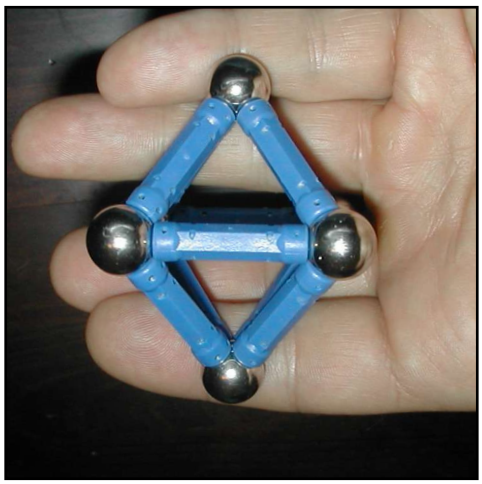
Links zu sehen das Gittermodell, rechts die Kugelpackung. Die Knotenpunkte des Gittermodells sind identisch mit den Kugelmittelpunkten!

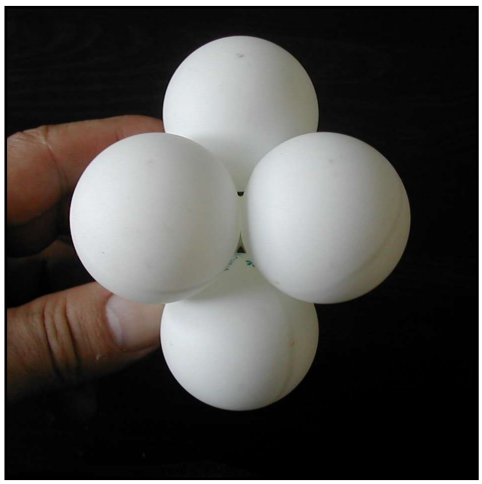








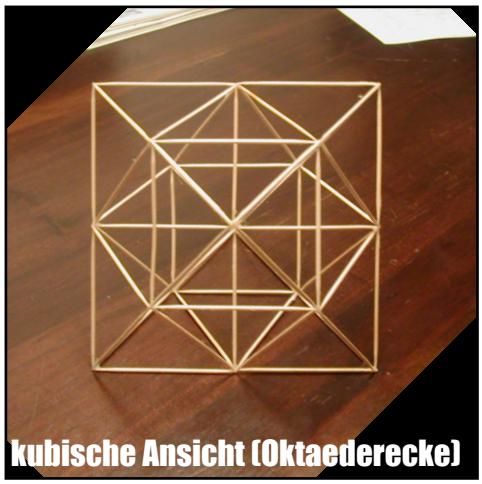


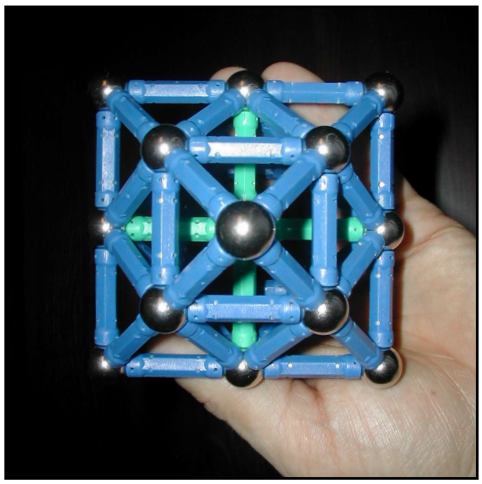


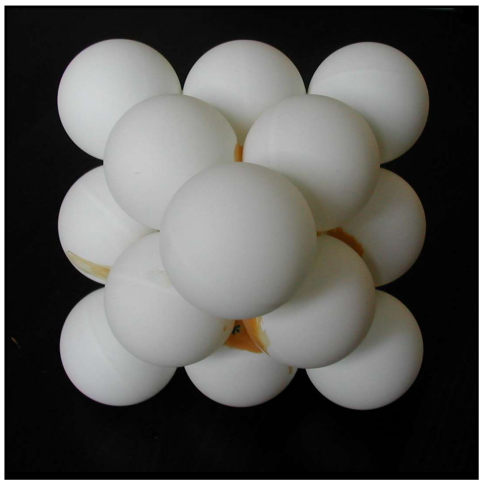
mehr auf: http://tetraktys.de

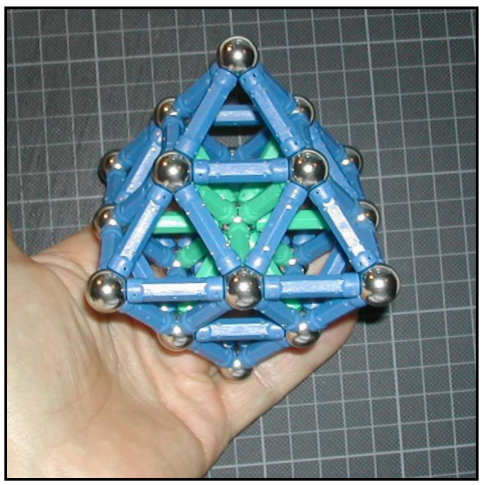
Das fraktale Oktaeder (3)

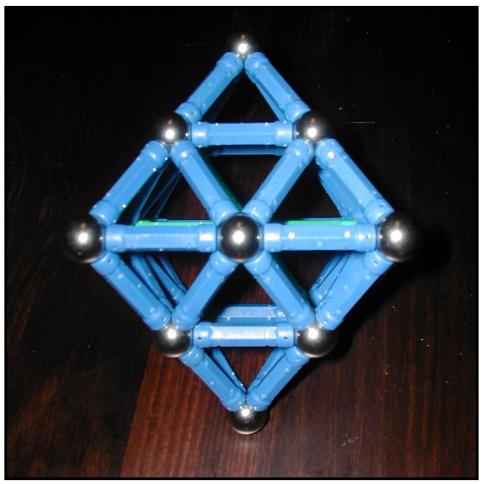
Links zu sehen das Gittermodell, rechts die Kugelpackung. Die Knotenpunkte des Gittermodells sind identisch mit den Kugelmittelpunkten!

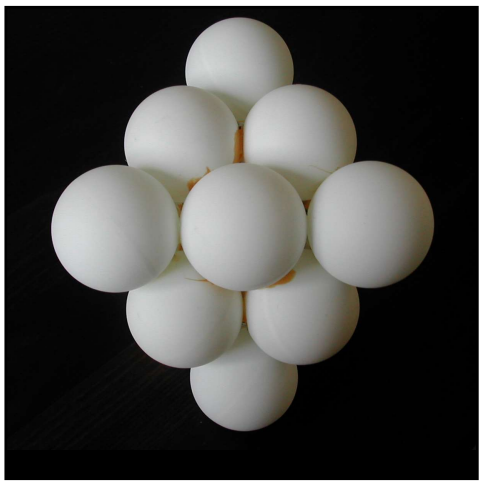








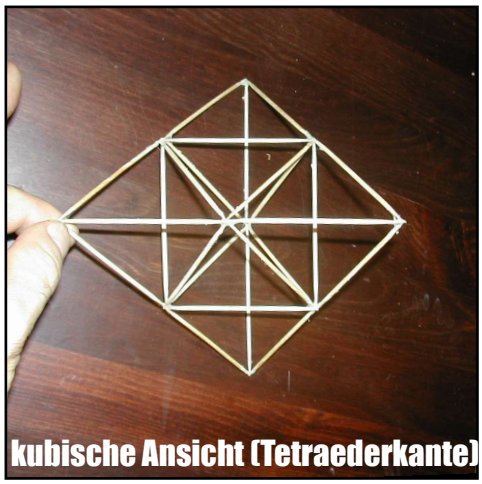


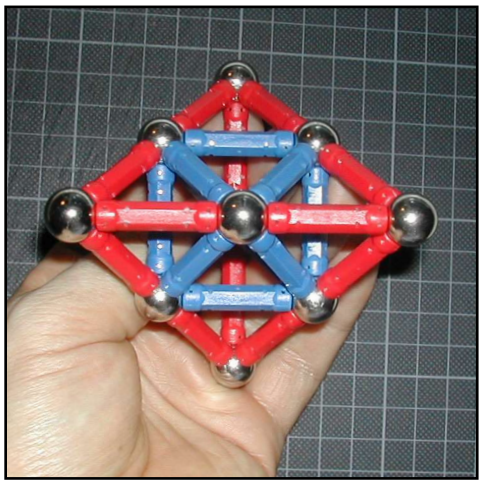


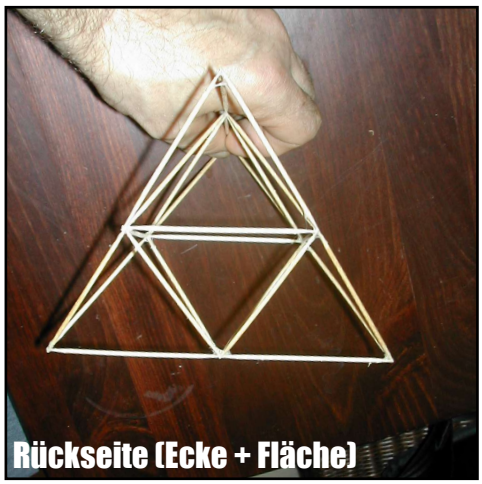
mehr auf: http://tetraktys.de

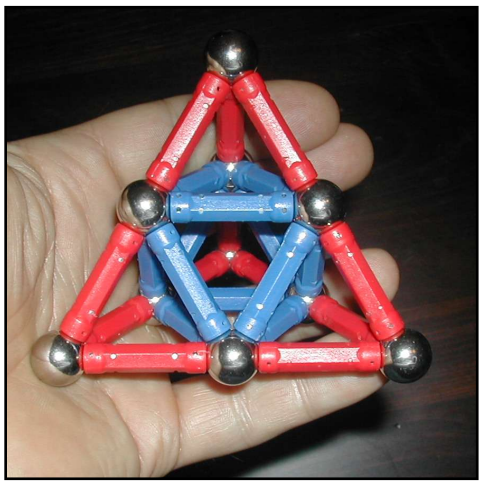
Das fraktale Tetraeder (4)

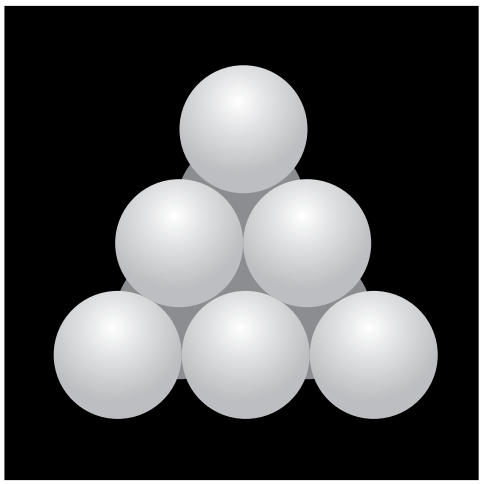
Links zu sehen das Gittermodell, rechts die Kugelpackung. Die Knotenpunkte des Gittermodells sind identisch mit den Kugelmittelpunkten!









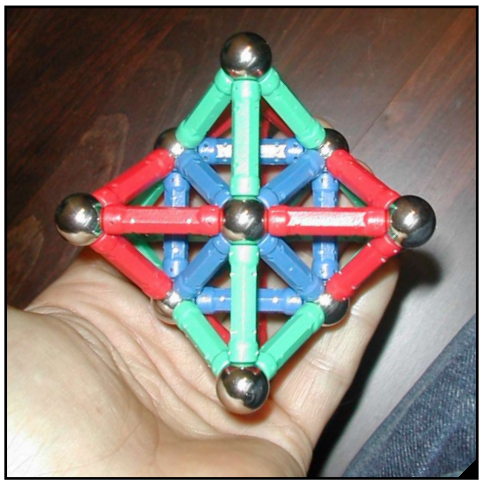


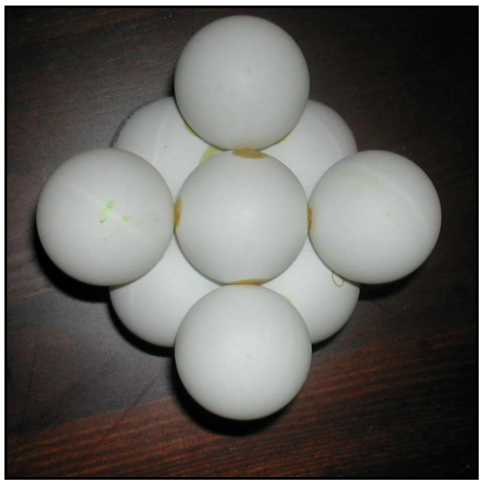
mehr auf: http://tetraktys.de

Das Sterntetraeder (6)

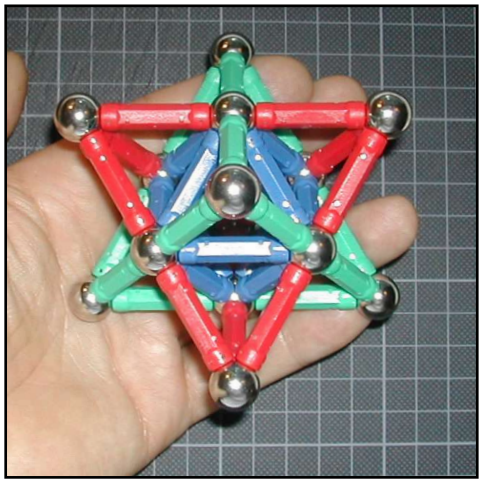
Links zu sehen das Gittermodell, rechts die Kugelpackung. Die Knotenpunkte des Gittermodells sind identisch mit den Kugelmittelpunkten!

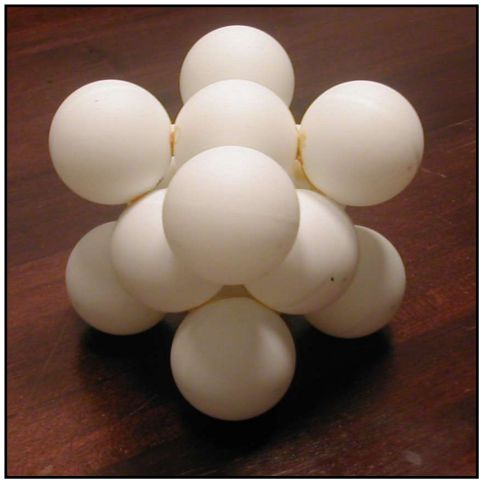
kubische Ansicht (Kubusfläche)



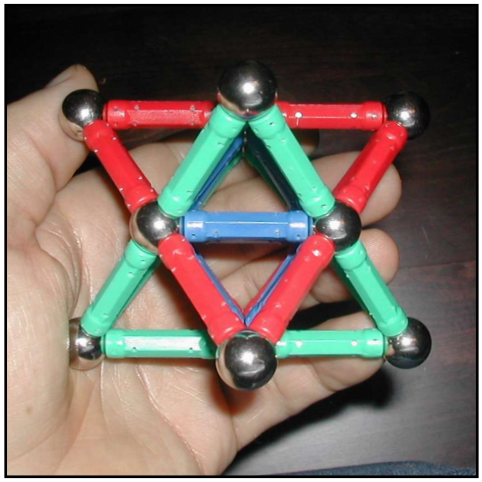


hexagonale Ansicht (Kubusecke)





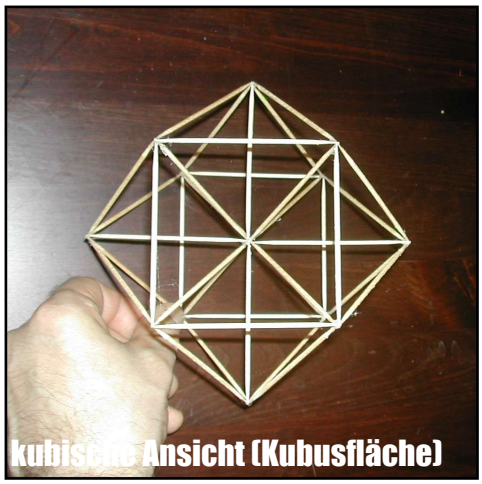
120/240-Grad-Winkel der Kante

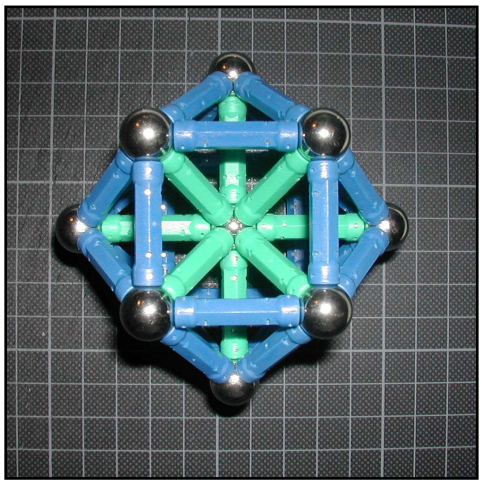


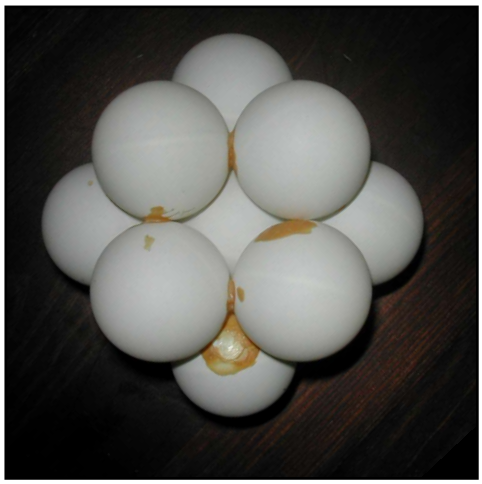
mehr auf: http://tetraktys.de

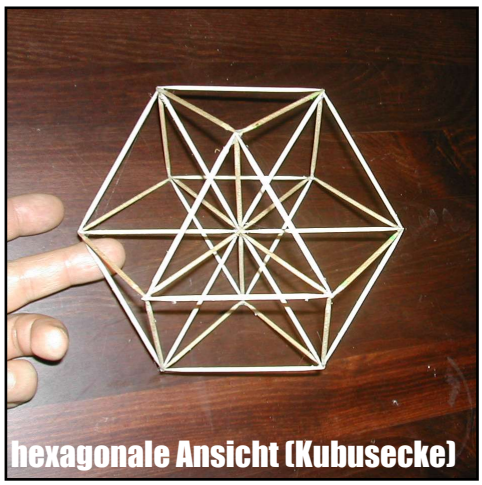
Das Kubooktaeder

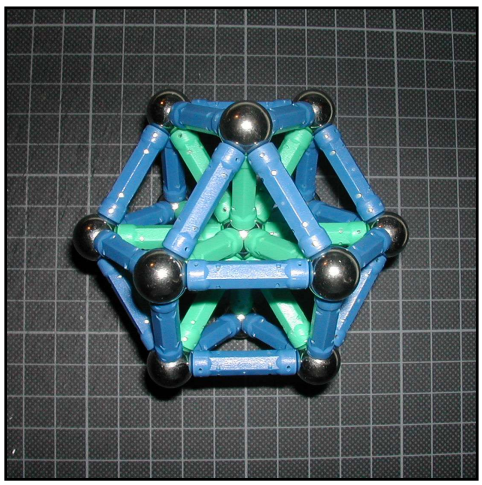
Links zu sehen das Gittermodell, rechts die Kugelpackung. Die Knotenpunkte des Gittermodells sind identisch mit den Kugelmittelpunkten!

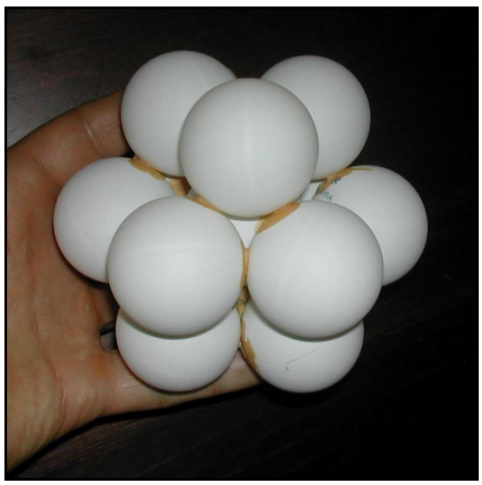


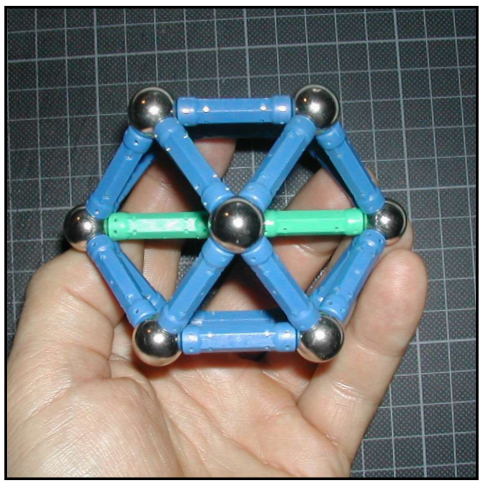










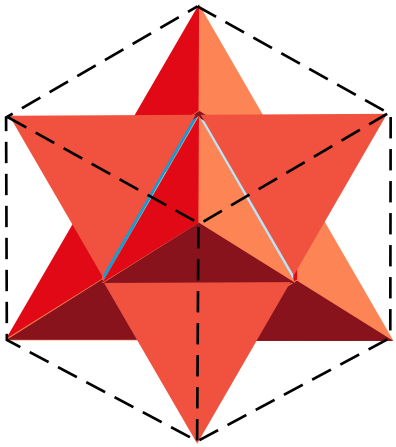


mehr auf: http://tetraktys.de

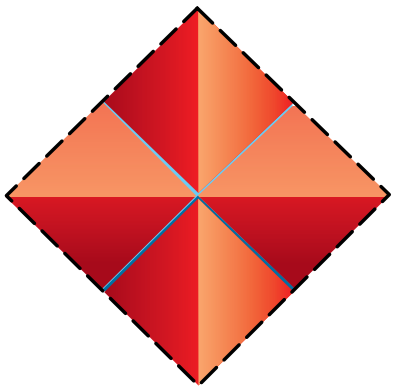
Das kubisch flächenzentrierte Gitter

An Hand der folgenden Abbildung erkennen Sie nun, dass sich der Kubus über die acht Ecken des Sterntetraeders spannt!
Weiter sehen Sie noch einmal die kompletten Gitterstrukturen und die eingezeichneten Kugeln.

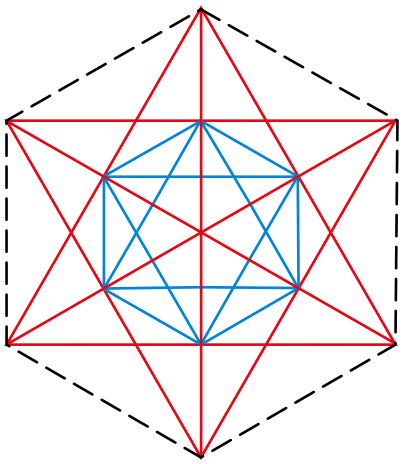
Die Tetraederkonturen so wie die zugehörigen Kugeln sind weiterhin in rot und die Oktaderkonturen + zugehörige Kugeln sind in blau eingezeichnet. -
Auf den folgenden Seiten gehe ich auf den Begriff kubisch flächenzentriert ein.

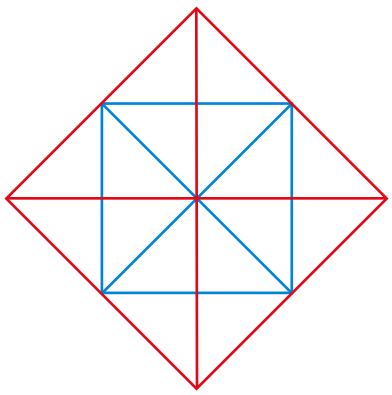


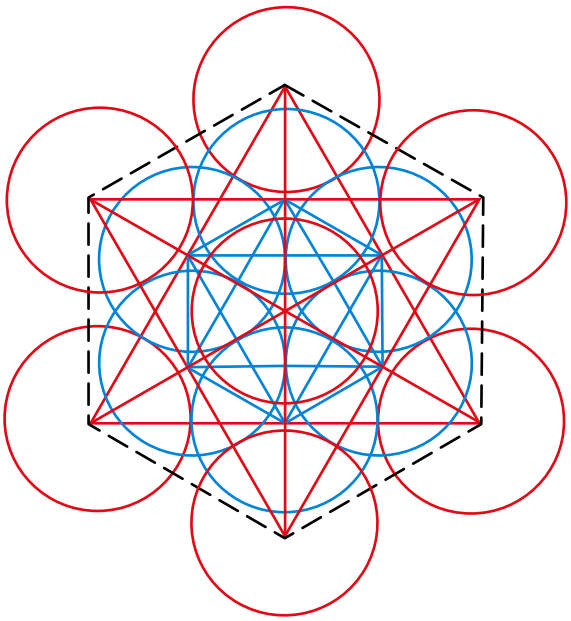
dem Kubus auf eine Ecke geschaut

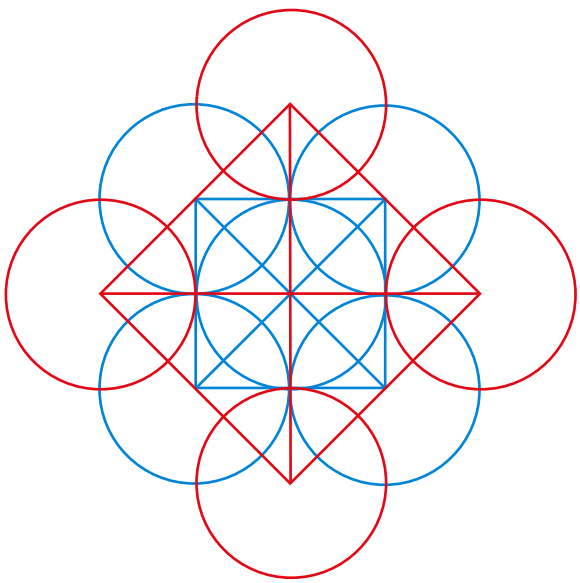


dem Kubus auf eine Fläche geschaut







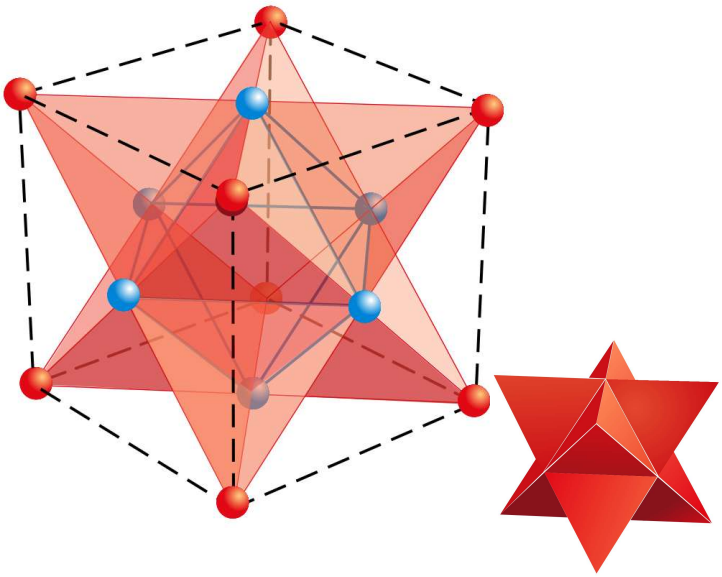


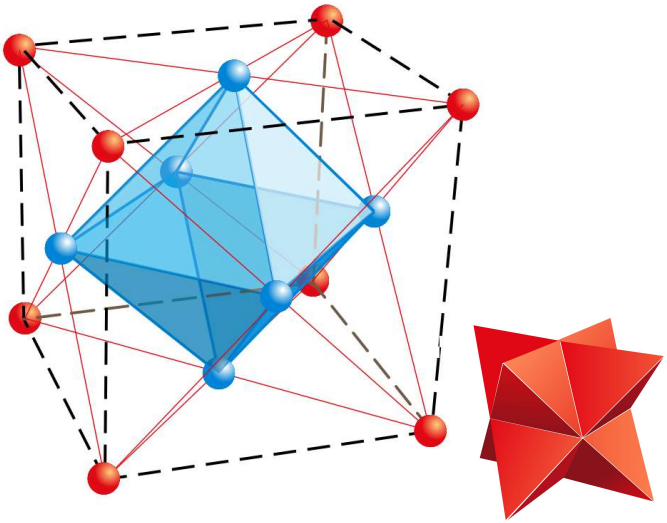
gehostet auf http://tetraktys.de

Das kubisch flächenzentrierte Gitter

Hier sehen Sie nun die Geometrie eines flächenzentrierten Gitters. Im Prinzip kann man sich auch das Einzeichnen des Oktaeders sparen, weil auch die Schnittpunkte der Diagonalen, die durch die Tetraeder schon gebildet werden, die Kugelposition markieren. Trotz alledem befindet sich im Mittelpunkt des Kubus eine Oktaederlücke. Anders herum zeichnet man nur einen Oktaeder ein – ohne die Diagonalen – auch dann haben wir alle Kugeln markiert.

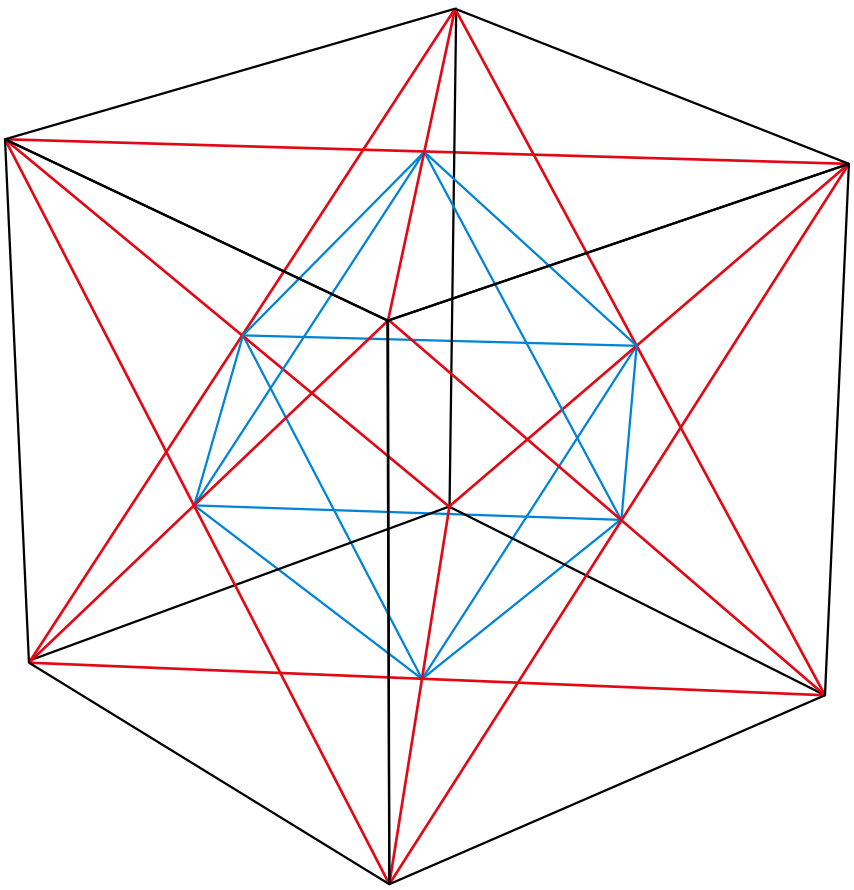
Hier nun beide Darstellungsvarianten mit jeweils etwas anderem Betrachtungswinkel.
Es handelt sich also um nichts anderes als die komplementäre Hexaeder-Oktaeder-Dualität, dessen Bindeglieder acht kleine (oder zwei große) Tetraeder darstellen! Die Fraktale Zergliederung dieser Struktur füllt den Kubus >nahezu< aus.





Definition kubisch flächenzentriertes Gitter:

Wikipedia:
Beim kubisch-flächenzentrierten Kristallgitter sind acht Atome so angeordnet, dass sie die Ecken eines Würfels bilden. Zusätzlich sind insgesamt sechs weitere Atome mittig auf den Würfelfächen so angeordnet, dass bei Verbindung dieser ein Oktaeder entsteht.
Meine Ergänzung zur Geometrie, die exakt den gleichen Tatbestand etwas anders beschreibt und dabei auf die Bezeichnung „kubisch flächenzentriert" eingeht:
Alle Flächen im kubisch flächenzentrierten Gitter sind spiegelsymetrisch um eine Oktaederlücke gespannt.



gehostet auf http://tetraktys.de

Auf den folgenden Seiten sehen Sie weitere Figuren aus dem kubisch flächenzentrierten Kristallgitter, der universellen Geometrie aus Dreiecken und Quadraten. Diese bilden im 3D-Raum Tetraeder und Oktaeder, und in der Summe Hexaeder (Kuben).

Das Sterntetraeder der ersten Iterationstufe

links das einfache Sterntetraeder, rechts die erste Stufe des Fraktals. In der mittleren Figur sehr schön zu erkennen: Der fraktale „Sirpinski-Charakter" der sich durchdringenden Tetraeder (rot und grün), dessen Schnittmenge das blaue Oktaeder ist.

kubische Ansicht (Kubusfläche)

kubische Ansicht (Kubusfläche)

hexagonale Ansicht (Kubusecke)

hexagonale Ansicht (Kubusecke)

120/240-Grad-Winkel der Kante

120/240-Grad-Winkel der Kante

mehr auf: http://tetraktys.de

Der Kubus verdichtet sich

links das fraktale Sterntetraeder, rechts die gleiche Figur mit zusätzlich eingebautem Kubooktaeder (weiße Stäbchen)

kubische Ansicht (Kubusfläche)

kubische Ansicht (Kubusfläche)

hexagonale Ansicht (Kubusecke)

hexagonale Ansicht (Kubusecke)

120/240-Grad-Winkel der Kante

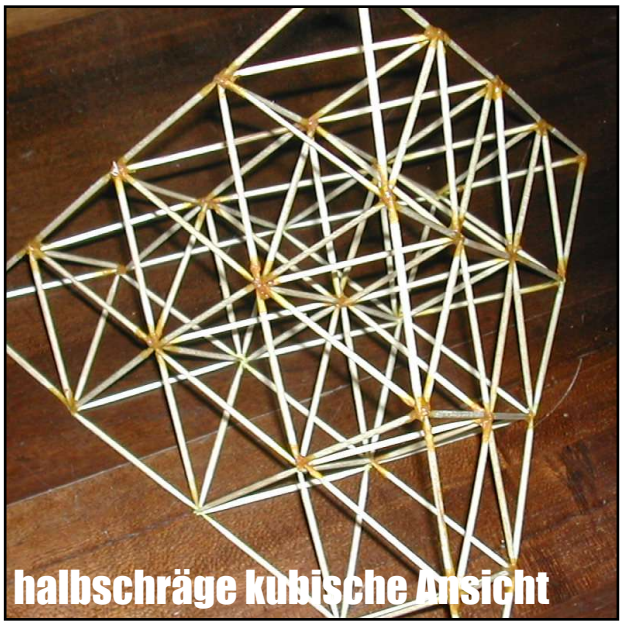
120/240-Grad-Winkel der Kante

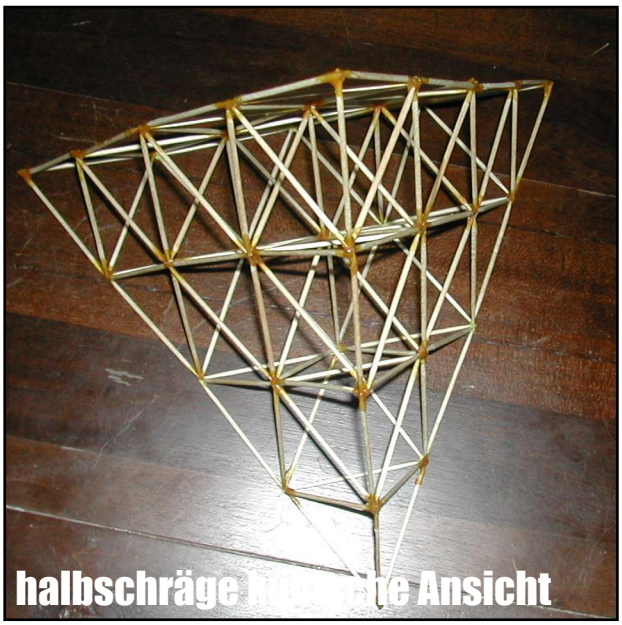
mehr auf: http://tetraktys.de

Fraktales Gitternetz im Tetraeder

Die Figur hat eine Kantenlänge von 5 Kugeln, daraus resultieren pro Schicht jeweils: 15, 10, 6, 3, 1 also = 35 Kugeln insgesamt. Dieses Modell ist leider etwas ungenau verklebt.

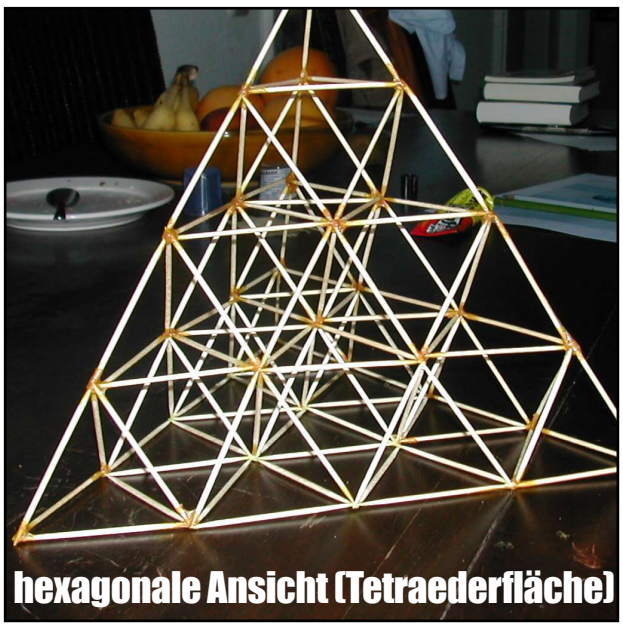
kubische Ansicht (Tetraederkante)


halbschräge kubische Ansicht

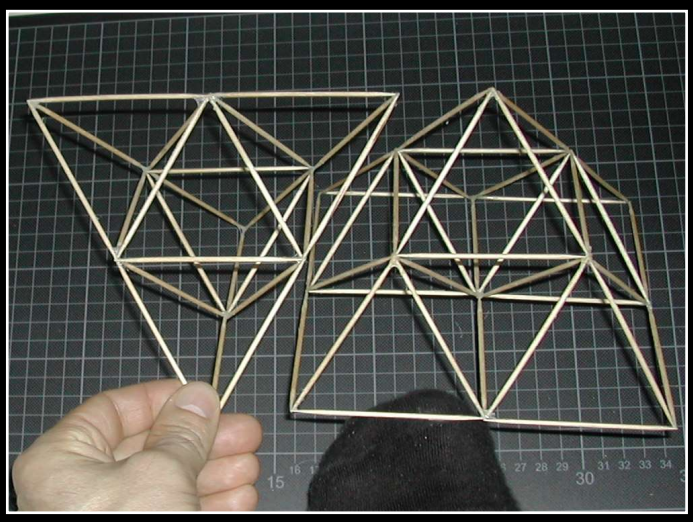

halbschräge kubische Ansicht

halbschräge kubische Ansicht

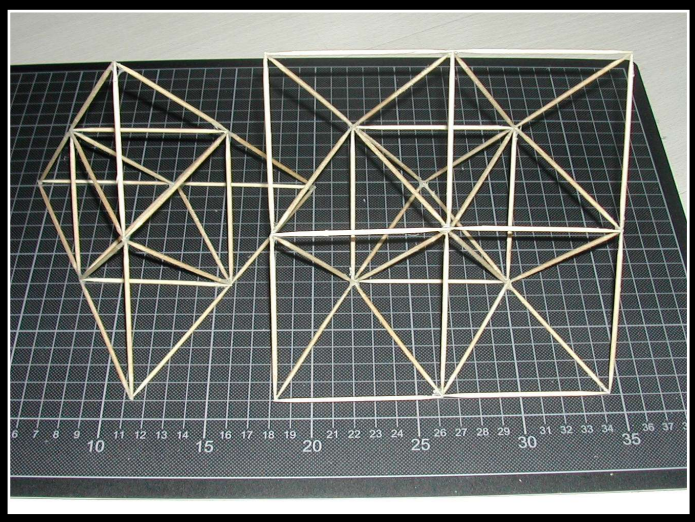
hexagonale Ansicht (Tetraederecke)


hexagonale Ansicht (Tetraederfläche)

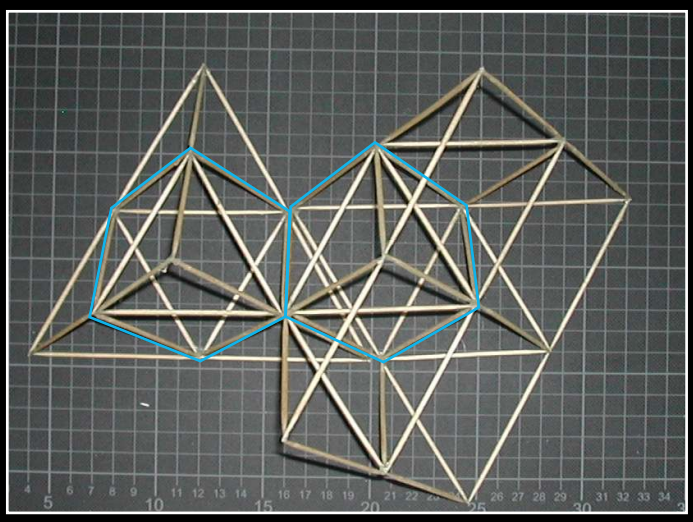
mehr auf: http://tetraktys.de



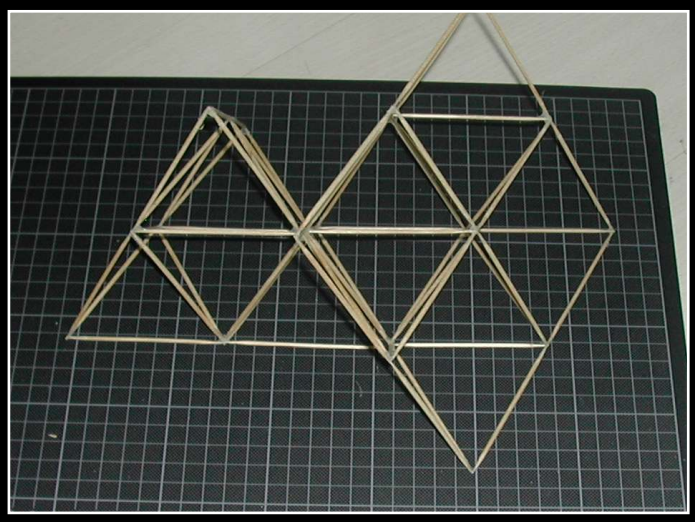
Nun habe ich noch einmal die Gittermodelle eines Tetraeders und eines halben Oktaeders mit einer Kantenlänge von jeweils drei Kugeln gebaut. Ich habe mich bemüht, die beiden Modelle immer so zu positionieren, dass das Innenleben der Konstruktion immer den gleichen Betrachtungswinkel aufweist.



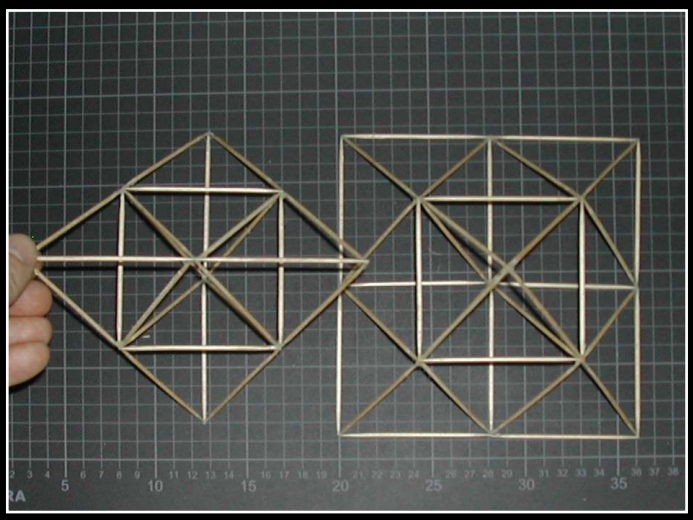
im linken Bild steht das Tetraeder auf einer Kante, hier liegt es auf einer seiner Seitenflächen. Rechts liegt das halbe Oktaeder auf einer seiner Dreiecksflächen. Die quadratische Grundfläche der Pyramide (= halbes Oktaeder) ist dem Betrachter zugewandt.



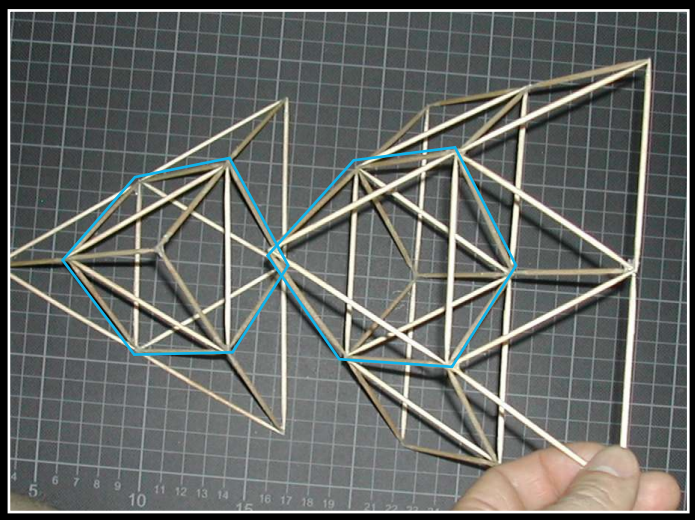
Links wieder das Tetraeder und rechts das halbe Oktaeder auf einer Dreiecksfläche liegend. Beide Gitter habe ich so zusammengelegt, das sie einen nahtlosen Zusammenschluss der Struktur ergeben. Oktaederlücken blau gekennzeichnet.



Links wieder das Tetraeder und rechts das halbe Oktaeder. Beide wieder so zusammengelegt, dass die Konstruktion fortlaufend ist. Hier sind für das ungeübte Auge keine Oktaeder innerhalb der Kristallstruktur erkennbar, was aber nicht heißt, dass die Oktaeder nicht vorhanden sind!



Beide Gittermodelle in der Position, wo die Kugeln eine kubische Formation bilden. Das Teraeder links steht auf einer Kante, deshalb muss ich es in Position halten. Das jeweilige Quadrat in der Mitte beider Figuren gehört zur Oktaederlücke.



Nochmal links das Tetraeder auf der Fläche liegend. Rechts das halbe Oktaeder. Ich habe es so gehalten, dass wieder der gleiche Blickwinkel des „Innenlebens" zu sehen ist. Sehr schön zu erkennen: die jeweiligen vollständigen Oktaederlücken beider Figuren. Noch einmal blau gekennzeichnet.

gehostet auf http://tetraktys.de